小圏の Euler 標数

Euler 標数というと、最も基本的な位相不変量として知られている。多面体などで、頂点-辺+面という計算をしたことはないだろうか。その応用として、正多面体が 5 種類しかないなどの説明につながる。一般的に空間 X の Euler 標数 $\chi(X)$ は、

$$\chi(X) = \sum_{i=0}(-1)^n \mathrm{rank} H_i(X)$$

というホモロジーのランクの交互和によって与えられる。よって、X が CW 複体の場合には、各次元の胞体の枚数の交互和となる。

ここでは空間ではなく、小圏の Euler 標数というものに着目しよう。[Lei] を参照する。最も安易なのは、小圏 C に対し、$\chi(C) = \chi(BC)$ と、分類空間の Euler 標数で定義してしまう方法である。しかし、単純な圏であっても分類空間を取ると無限次元の空間になり、Euler 標数が定義できない場合がある。そこで、小圏の射と対象の情報から、行列を用いた線形代数で Euler 標数を計算する方法を紹介する。ただ、一つの問題はすべての小圏に対し、Euler 標数が定義できるわけではない。どの程度の条件を付けるかだが、分類空間の Euler 標数との対応も考えるなら、考えるべき圏は有限で非輪状な圏とすべきである。

定義 0.1. C を小圏とする。C が有限であるとは、対象、射の集合がともに有限であることを指す。また、C が非輪状であるとは、$C(x,x) = \{1_x\}$ であり、$C(y,z) \neq \phi$ ならば、$C(z,y) = \phi$ であるような圏を指す。

以下、C は有限な圏とし、対象には $c_1, \cdots, c_n$ と適当な番号づけられているとする。

定義 0.2. 有限な圏 C に対し、行列 $M(C)$ を $M(C)_{i,j} = |C(i,j)|$ と定義する。$M(C)$ が正則である時、逆行列 $M(C)^{-1}$ のすべての成分の和を $\chi(C)$ と定義し、C の Euler 標数と呼ぶ。

$$\chi(C) = \sum M(C)^{-1}$$

注意 0.3. C が有限な非輪状の圏とした時には、$M(C)$ の対角成分はすべて 1 であり、上三角、あるいは下三角行列となる。

Leinster の導入では行列ではなく、Möbious inversion という関数による記述になっている。どちらも同じである。

注意 0.4. C に対し、行列 $M(C)$ は関数、

$$\xi : C_0 \times C_0 \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$\xi(a,b) = |C(a,b)|$ を考えることと同値である。一般に、２つの関数

$$\alpha, \beta : C_0 \times C_0 \longrightarrow \mathbb{Q}$$

に対し、$(\alpha\beta)(a,b) = \sum_{c \in C_0} \alpha(a,c)\beta(c,b)$ と積を定義する。単元は Kronecker delta δ である。これが行列の積に対応している。よって、ξ の逆元 μ が存在するとき、μ を Möbious inversion と呼ぶ。$\chi(C) = \sum_{a,b \in C_0} \mu(a,b)$ である。

1 分類空間の Euler 標数との対応

小圏 C に対し、分類空間 BC は以下のように与えられる。まず、$N_nC = \mathrm{Funct}([n], C)$ で与えられる単体的集合 NC を考え、$BC = |NC|$ により与えられる。N_nC は n 本の合成可能な射の組（n-nerve）からなる。特に、$\overline{N}_n(C)$ を N_nC の部分集合で、恒等射を含まない射の組（非退化な nerve）とする。BC は CW 複体であり、BC の n-胞体の集合は $\overline{N}_nC$ に対応している。

定理 1.1. C を有限で非輪状な圏とすると、

$$\mu(a,b) = \sum_i (-1)^i \overline{N}_i(a,b)$$

で与えられている。

Proof. $\mu(a,b)$ が上記の式で与えられているとする。

$$(\mu\xi)(a,c) = \sum_{b\in C_0} \mu(a,b)\xi(b,c) = \mu(a,c)\xi(c,c) + \sum_{b\neq c}\mu(a,b)\xi(b,c) = \mu(a,c) + \sum_{b\neq c, f\in C(b,c)} \mu(a,b) = \delta(a,c)$$

□

系 1.2. C を有限で非輪状な圏とすると、$\chi(BC) = \chi(C)$ である。

Proof. BC は CW 複体で、その n-複体は非退化な n-nerve に対応している。よって、

$$\chi(BC) = \sum_i (-1)^i \overline{N}_i(C) = \sum_{a,b}\sum_i (-1)^i \overline{N}_i(a,b) = \chi(C)$$

である。 □

これを行列の言葉に直すと以下のようになる。

定理 1.3. C を有限で非輪状な圏とすると、

$$\chi(BC) = \sum M(C)^{-1}$$

である。

後は例でも見てみよう。

例 1.4. $C : \cdot \longrightarrow \cdot$ という小圏を考えると、

$$M(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$M(C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、$\chi(C) = 1$。ちなみに、$BC = [0,1]$ で可縮なので、$\chi(BC) = 1$ である。

例 1.5. $C : \cdot \rightrightarrows \cdot$ とすると、

$$M(C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$M(C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、$\chi(C) = 0$。ちなみに、$BC = S^1$ なので、$\chi(BC) = 0$ である。

例 1.6. $C : \cdot \rightrightarrows \cdot \rightrightarrows \cdot$ とし、合成を $\mathbb{Z}_2$ の積で与える。残念ながら、Euler 標数には合成の情報は反映されないが。

$$M(C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であり、

$$M(C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので、$\chi(C) = 1$。ちなみに、$BC = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ なので、$\chi(BC) = 1$ である。

参考文献

[Lei] Tom Leinster. The Euler characteristic of a category. Doc. Math. , 13:21–49, 2008